

## Die Anwendung der Kreuzkorrelation (KK) auf die Radialgeschwindigkeitsbestimmung astronomischer Objekte

Bewegt sich ein Objekt auf der Sichtlinie zum Beobachter mit der Geschwindigkeit  $v_r$ , so bewirkt der Dopplereffekt die Verschiebung des gesamten Spektrums auf der Wellenlängenskala um den Betrag  $\Delta\lambda$  gemäß Formel (1).

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{v_r}{c} \quad (1)$$

Hierin sind  $\lambda_0$  die unverschobene Wellenlänge und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit.

Aus Formel (1) gehen zweierlei Eigenschaften der Dopplerverschiebung hervor:

1. Die Dopplerverschiebung ist ein sehr kleiner Effekt, da die zahlenmäßig große Konstante  $c$  im Nenner des Quotienten  $v_r/c$  steht und
2. der Betrag der Dopplerverschiebung ist wellenlängenabhängig.

Die erste Eigenschaft erfordert entsprechend der angestrebten Messgenauigkeit eine sehr präzise Kalibrierung der Spektren. Die zweite Eigenschaft, die Wellenlängenabhängigkeit der Dopplerverschiebung, wird weiter unten im Abschnitt „praktische Realisierung der KK“ noch einmal Berücksichtigung finden.

Die Dopplerverschiebung kann mit unterschiedlichen Methoden bestimmt werden; entweder durch die Vermessung geometrischer Merkmale einzelner Spektrallinien - oftmals durch Anpassung einer Gaußfunktion - oder durch Vergleich eines kompletten Wellenlängenbereichs mit einem Referenzspektrum mittels KK. Welche der genannten Methoden zur Anwendung kommen sollte, lässt sich nicht pauschal beantworten. Dies hängt u. a. von der Beschaffenheit (Spektralklasse) des Spektrums, des von der Spektralaufnahme abgedeckten Wellenlängenbereichs und der Fragestellung, die untersucht werden soll, ab. Beispielsweise beobachtet man bei Cepheiden häufig unterschiedliche Radialgeschwindigkeitsamplituden für die verschiedenen Metalle, da die Absorptionslinien in unterschiedlicher Tiefe der Sternatmosphäre entstehen. Derartige „line-level-effects“ können natürlich nur durch Messmethoden an einzelnen Linien nachgewiesen werden. Im Gegensatz hierzu kommen die Vorteile der KK bei der Beobachtung von spektroskopischen Doppelsternen oder bei der Suche nach Exoplaneten zum Tragen, da die Genauigkeit bzw. die Nachweisempfindlichkeit von Radialgeschwindigkeitsperioden in Zeitserien mit der Zahl der untersuchten Linien zunimmt. Mit der KK werden auf sehr effiziente Weise alle spektralen Linien im korrelierten Spektralbereich erfasst. Im Zweifelsfall müssen die verschiedenen Methoden auf ihre Eignung getestet werden. Meine eigene Beobachtungsreihe an Polaris ergab zum Beispiel keine signifikante Genauigkeitssteigerung der KK im Vergleich zum Gaußfit an den 10 stärksten Linien. Der Zeitgewinn bei der Auswertung ist allerdings beträchtlich. Die Auswertung einer Zeitserie von ca. 130 Spektren des kurzperiodischen Delta-Scuti-Sterns beta Cas mit seinen weniger starken Linien wäre hingegen ohne die Anwendung der KK undenkbar gewesen.

Die KK funktioniert allerdings nur, wenn die miteinander korrelierten Spektren möglichst ähnlich sind. Je mehr sich die beiden Spektren voneinander unterscheiden, desto flacher verläuft das Korrelationsmaximum. In der Praxis verwendet man als Referenzspektrum, auch Maske (engl. template) genannt, ein Spektrum eines Sterns gleicher Spektralklasse, ein synthetisch errechnetes Spektrum oder ein Spektrum des Objektes selbst.

### Die Kreuzkorrelation (KK)

Mit der KK wird der Grad der Übereinstimmung zweier Spektren in Abhängigkeit von deren gegenseitiger Verschiebung bestimmt. Man ermittelt die Größe der Verschiebung des Spektrums bzw. des Vergleichsspektrums (beides führt zum gleichen Ergebnis, wenn man die Richtung der Verschiebung beachtet), die notwendig ist, um

eine maximale Übereinstimmung der korrelierten Spektren zu erzielen. Das Maß der Übereinstimmung ist durch den Korrelationskoeffizienten definiert (Gl. 2). Dieser wird errechnet, indem von den in diskreter Form vorliegenden Intensitätswerten  $i=1,2,\dots,n$  der Spektren A und B die Produkte der jeweils positionsgleichen Stützstellen auf der Wellenlängenachse gebildet und diese über den Korrelationsbereich anschließend aufsummiert werden:

$$c = \sum_{i=1}^n A_i \cdot B_i \quad (2)$$

Wird nun das Spektrum B schrittweise von Stützstelle zu Stützstelle gegenüber dem Spektrum A verschoben, erhält man mit der Verschiebung  $s$  die Korrelationsfunktion  $c(s)$ :

$$c(s) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot B_{i-s} \quad (3)$$

Aus der Position des Maximums der Korrelationsfunktion erhält man die Dopplerverschiebung der Spektren zueinander (Abb. 1).

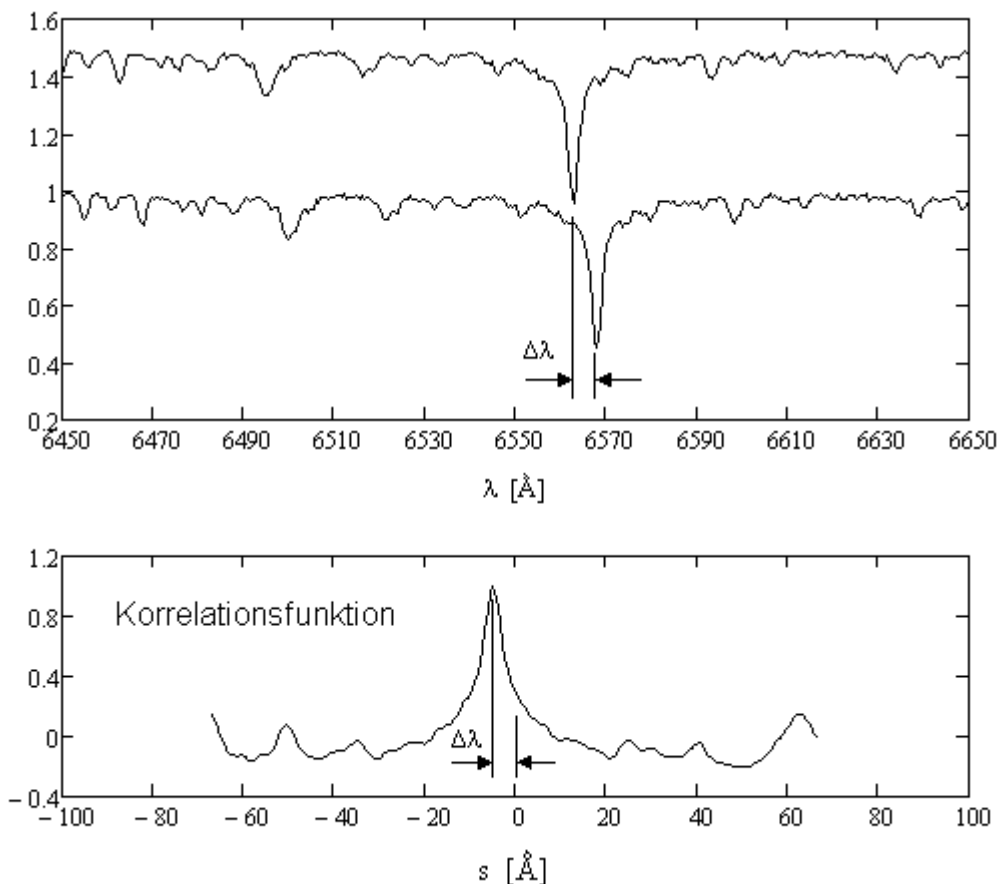


Abb. 1: Zwei Spektren mit einer Dopplerverschiebung von 5 Å (oben). Kreuzkorrelation der beiden Spektren (unten)

Die KK kann auch in einer normierten Form ausgeführt werden, so dass das Maximum von  $c(s)$  den Wert 1 annimmt und mit abnehmender Korrelation gegen 0 geht:

$$c(s) = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i - \bar{A})(B_{i-s} - \bar{B})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - \bar{A})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (B_{i-s} - \bar{B})^2}} \quad (4)$$

Hierin sind  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  die arithmetischen Mittelwerte der Intensitäten der Spektren im Korrelationsbereich.

Eine weitere Möglichkeit der KK besteht in der Anwendung der diskreten Fouriertransformation. Wir ersetzen  $A_i$  und  $B_i$  durch die Fouriertransformierten  $F(K)$  und  $G(K)$ . Die Korrelationsfunktion (3) lautet dann mit der komplex konjugierten  $G(k)^*$  von  $G(k)$ :

$$c(k) = F(k) \cdot G(k)^* \quad (5)$$

### Praktische Realisierung der KK

Die exakte Durchführung der KK ist aus mehreren Gründen etwas komplizierter als oben dargestellt. Wie eingangs schon erwähnt, ist die Dopplerverschiebung  $\Delta\lambda$  wellenlängenabhängig, d.h. je langwelliger die Spektrallinien sind, desto größer sind auch ihre Dopplerverschiebungen. Da die KK aber ein linearer Vorgang ist, muss diese Abhängigkeit von der Wellenlänge beseitigt werden. Dies erreicht man durch Logarithmieren der Wellenlängen; man ersetzt also die Spektren  $F(\lambda)$  durch  $F(\ln\lambda)$ . In einem weiteren Schritt wird durch Interpolation die neue Wellenlängenchse  $\ln\lambda$  äquidistant unterteilt – die Stützstellen haben dann die gleichen Abstände. Dieser Vorgang wird auch als „resampling“ bezeichnet. Mit den so vorbereiteten Spektren kann dann die KK mit den Gleichungen 3 oder 4 durchgeführt werden. Die Korrelationsfunktion besitzt ein Maximum an der Stelle

$$\Delta s_{\max} = (v_{r,A} - v_{r,B}) \cdot c \quad (6)$$

Die gesuchte Radialgeschwindigkeit  $v_r$  des Spektrums A ist dann

$$v_{r,A} = c \left( \Delta s_{\max} - \frac{v_{r,B}}{c} \right) \quad (7)$$

$v_{r,B}$  - Radialgeschwindigkeit des Referenzspektrums

Will man eine bestimmte Genauigkeit der RV-Bestimmung erreichen, müssen die Abstände der Stützstellen entsprechend klein sein. Zum Beispiel darf die Schrittweite bei einer Auflösung von 1 km/s bei der H $\alpha$ -Linie 0,02 Å nicht überschreiten. Die Anzahl der Stützstellen steigt demzufolge mit zunehmender Genauigkeit und größer werdendem Spektralbereich so stark an, dass sich die Rechenzeit nicht mehr vernachlässigen lässt. Alternativ zu einer sehr großen Anzahl der Stützstellen kann das Maximum der KK-Funktion auch durch Anfitten einer Gaußfunktion oder durch nicht-lineare Interpolation zwischen den Stützstellen bestimmt werden. Da die Korrelationsfunktion nicht streng symmetrisch sein muss, kann es allerdings bei der Anwendung der Gaußfunktion zu leichten Abweichungen kommen.

Abschließend möchte ich noch anmerken, dass ich durch die Anwendung der diskreten Fouriertransformation im Vergleich zur Anwendung der Formeln (3) oder (4) keine Verkürzung der Rechenzeit erzielen konnte.